Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS BIOALC • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

BTS BioAlc

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbioalc.fr/assets/annales/bts-bioalc/E2 - Mathématiques/2023/BTS BioAlc - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du meuble et le fond du tiroir est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie cette fermeture par une équation différentielle, l'analyse d'une fonction exponentielle, un algorithme et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1. a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On factorise : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Les racines sont les valeurs qui annulent l'un des facteurs.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. **À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle (Eₒ) : y'' + 5y' + 4y = 0.**

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D'après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison des exponentielles correspondantes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. **À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).**

La distance initiale est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La vitesse initiale, égale à $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, est la dérivée de la distance : $f'(0) = -10$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2. b. **En utilisant l'expression admise de f, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

Dans l'expression admise, on remplace t par 2 : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. La distance est exprimée en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc la distance est déjà sous 0,5 cm. Comme $f(0) = 20$ et f est continue, le seuil a été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1. a. **En utilisant la limite rappelée de l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand t tend vers $+\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Leur combinaison linéaire tend donc également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 0, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque exponentielle avec $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

On sait que $f'(t) < 0$ sur l'intervalle. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	$-$
Variation de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau d'exécution de l'algorithme à partir de la ligne 36, en calculant les valeurs de f(t) arrondies au centième et en évaluant la condition jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

La boucle augmente t de 0,1 et continue tant que $f(t) > 0{,}5$. On évalue les lignes demandées jusqu'à ce que cette condition devienne fausse.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3{,}8$, la distance vaut environ 0,52 cm : la condition reste vraie. À $t = 3{,}9$, elle vaut environ 0,47 cm : la condition devient fausse et la boucle s'arrête.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Question 4. À partir de la définition de la position moyenne m comme moyenne de f sur [0 ; 4], démontrer l'expression exacte demandée pour m.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Donc $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$, soit $m = \frac{1}{4}\left(\frac{70}{3} - \frac{5}{6} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

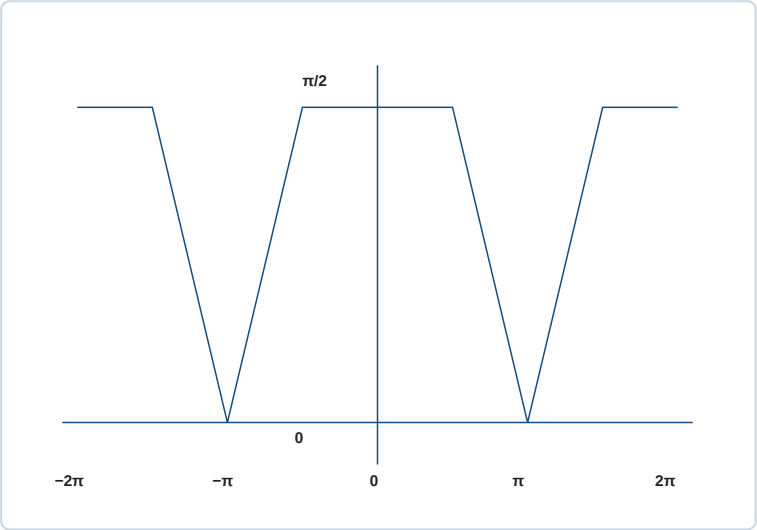
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

L'exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux, et sur son développement en série de Fourier. Les tâches évaluent le tracé de la fonction, le calcul de coefficients, l'étude d'une somme partielle et l'estimation d'une erreur sur la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en utilisant sa définition par morceaux et sa périodicité.

Sur \,$[-2\pi ; 2\pi]$, la fonction est paire et de période 2π. Elle vaut $\pi/2$ sur les intervalles centrés en les multiples de 2π, puis décroît ou croît linéairement jusqu'à 0 aux multiples impairs de π. Le tracé respecte ainsi les points et plateaux de la définition par morceaux.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe périodique paire, de maximum $\pi/2$, nulle en $t = \pm\pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Pour $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f est paire et $\sin(nt)$ est impaire, donc leur produit est impair. L'intégrale d'une fonction impaire sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est nulle. Cette conclusion vaut pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f, sachant que sa période est T = 2π.

La pulsation est reliée à la période par $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Comme $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Les termes trigonométriques de la série s'écrivent donc $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{unité de temps}^{-1}$.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant a_0 est égal à 3π/8.

Sur $[0;\pi/2]$, $f(t) = \pi/2$, puis sur $[\pi/2;\pi]$, $f(t) = \pi - t$. Ainsi, $\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\,dt = \frac{3\pi^2}{8}$. Par parité, l'intégrale sur une période vaut $\frac{3\pi^2}{4}$, donc $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{3\pi^2}{4}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. En utilisant la parité de f et les formules de Fourier, démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'expression intégrale de a_n donnée dans le sujet.

La formule du sujet et la parité de f donnent, pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale en $[0;\pi/2]$ et $[\pi/2;\pi]$, où les expressions de f sont différentes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour $n \geq 1$.

Question 6. À partir de l'expression admise de a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1, 2, 3$, les différences de cosinus sont respectivement $1, -2, 1$. En remplaçant n par chacune de ces valeurs, on obtient les trois coefficients exacts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des coefficients précédents l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ indiquée dans le sujet.

Comme tous les coefficients b_n sont nuls, la somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t)$. On y remplace a_0, a_1, a_2, a_3 par les valeurs obtenues aux questions précédentes.

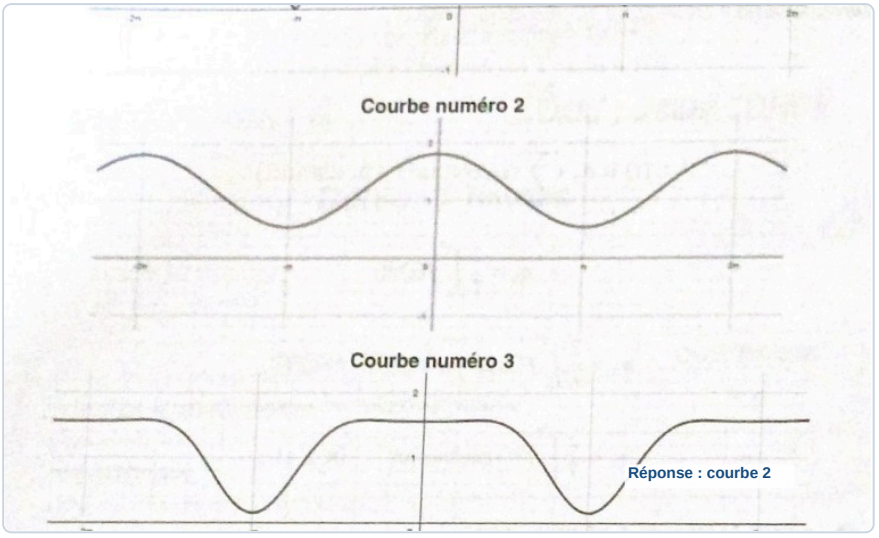
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.**

La somme partielle s_3 est représentée par la courbe numéro 2. C'est la réponse à reporter, comme demandé sans justification.

Courbe représentant s_3



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 2.

Question 9. a. **À partir de la définition de P en fonction de a_0, a_1, a_2 et a_3, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

La définition donne $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$. En utilisant les coefficients exacts, $P = (3\pi/8)^2 + \frac{1}{2}\left((2/\pi)^2 + (-1/\pi)^2 + (2/(9\pi))^2\right) = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'arrondi demandé est à quatre décimales.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9. b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur correspondant parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

L'erreur relative vaut $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \pi^2/6 \approx 1{,}6449$, elle est d'environ $0{,}074\%$. Parmi les trois choix proposés, cela correspond à $0{,}1\%$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS BIOALC

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Ses deux exercices étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une série de Fourier associée à une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Une limite finie de f(t) lorsque t tend vers $+\infty$ donne une asymptote horizontale à la courbe de f.
- La pulsation d'une fonction périodique de période T vaut $\omega = 2\pi/T$.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et les coefficients a_n se calculent à l'aide d'une intégrale sur une demi-période.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f(t) est une distance en centimètres et t est exprimé en secondes.
- Distinguer la distance initiale f(0) de la vitesse initiale f'(0), qui est négative.
- Dans l'algorithme, incrémenter t de p puis tester la condition jusqu'à ce qu'elle devienne fausse.
- Pour les séries de Fourier, distinguer le terme constant a_0 des coefficients a_n et appliquer les formules fournies.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution. On utilise ensuite les valeurs initiales f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur les séries de Fourier ?

La fonction f est paire et $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur une période symétrique est nulle. On obtient ainsi $b_n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices notés chacun sur 10 points. Le coefficient dépend de la spécialité : 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique.

Q : Quelle précision faut-il respecter pour les calculs numériques ?

Le sujet demande une valeur de P à 10^{-4} près et indique d'arrondir les valeurs de f(t) du tableau au centième. Il faut respecter la précision spécifiée pour chaque calcul.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbioalc.fr/assets/annales/bts-bioalc/E2 - Mathématiques/2023/BTS BioAlc - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS BioAlc : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.